

Devoir 1

A rendre le 10 mars 2026

Une attention particulière doit être apportée à la rédaction.

Exercice 1.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel de dimension finie n . Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p < n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun. On pourra raisonner par récurrence descendante sur p .

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$. Démontrer que la famille (P_0, \dots, P_n) forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le \mathbb{R} espace vectoriel des suites à valeurs complexes. Montrer que l'ensemble F des suites arithmétiques (complexes) est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

Exercice 4.

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = 0\}$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en donner la dimension.
- (2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3[X]$.